第27卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 3
2010年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0513-08

二阶 Dirichlet 问题的六面体等参元逼近及其数值积分的影响*

张斐然

(商丘师范学院数学系，河南 商丘 476000)

摘　要: 本文研究的是三维曲边区域上二阶椭圆型问题的等参有限元逼近。利用等参变换技巧和有限元插值理论，本文证明了等参有限元对于曲边区域边值问题具有最优收敛性，保证了等参有限元数值格式在工程应用中的可靠性和有效性。本文第二部分致力于构造简单有效的数值积分公式。文中给出的四点、五点、六点和八点六面体数值积分公式，可以简化单元刚度矩阵和荷载向量的计算，并严格证明了利用数值积分公式的等参元数值格式仍然保持最优收敛阶。

关键词: 六面体等参元；等参变换；数值积分

分类号: **AMS**(2000) 65N30; 65N12　　**中图分类号**: O241.82　　**文献标识码**: A

1　引言

有限元方法自出现以来，由于其强大的功能和相对严格完善的理论，在数学界和工程界的各领域得到了广泛的应用。但有限元方法处理曲边区域问题时，会遇到网格和区域不完全匹配的问题。常用的方法有两种：一是用多角形区域来逼近，通过边界处网格的充分加密来减小误差[1-4]。但这要面临局部网格加密的问题，否则会带来计算量的巨大增加。二是采用等参数有限元方法，这种方法的优点是可以保持直边有限元的计算量，而且可以更高精度的逼近区域的边界。但由于引入了非线性变换，给有限元格式的收敛性分析和误差估计带来很大难度。另外，由于变换的复杂性，程序的实现过程中各种积分的计算变得更加复杂。由于等参元的上述优点，使得该方法在实际中(特别是工程中)得到很多应用，其数学文献多见于在二维问题中的应用[5-9]，关于三维等参元方法的分析和计算在文献中并不多见。

另外，在实际计算中，单元刚度矩阵和荷载向量的快速计算对大型工程问题也是至关重要的一个环节。寻找单元上简单易算的数值积分公式，成为一个有意思的研究课题。明平兵等在文献 [10] 中研究了数值积分格式对旋转 Q_1 元的影响，并构造了简单的积分公式。文献 [11] 研究了数值积分公式对于四面体等参元的影响。本文构造了应用于六面体等参元计算的四种简单有效的数值积分格式。并且这四种积分格式分别用八个，六个，五个和四个积分点，我们证明，离散问题经过这四种数值积分公式的近似计算后，仍然收敛于连续问题的解，并且保持收敛阶不变。因此，相比较而言，在保持整体离散精度的前提下，积分公式的积分点越少，计算就越简单。

收稿日期: 2008-08-04.　**作者简介**: 张斐然 (1972年12月生)，男，副教授. 研究方向：有限元方法.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10471133; 10590353)；河南省自然科学基金 (092300410141).

2 六面体网格剖分和等参有限元

设$\Omega \subset \mathbf{R}^3$为有界Lipschitz区域，$\mathcal{T}_h^0$为$\Omega$的六面体剖分，其所有单元的顶点均在$\bar{\Omega}$内。下面我们通过介绍等参变换来引入$\Omega$的六面体网格剖分。$Q_k(K)$是$K$上对每一个分量的指数都不超过$k$的多项式空间，维数是$(k+1)^n$，这里$n$是空间维数。$Q_k(K)$上半模定义为

$$[v]_{m,p,K} = \Big(\int_K \sum_{i=1}^{n} \Big| \frac{\partial^m v(x)}{\partial {x_i}^m} \Big|^p \mathrm{d}x \Big)^{1/p} = \Big(\int_K \sum_{i=1}^{n} \big| D^m v(x)({e_i}^m) \big|^p \mathrm{d}x \Big)^{1/p},$$

$$[v]_{m,\infty,K} = \max_{1\le i\le n} \sup_{x\in K} \big\| D^m v(x)({e_i}^m) \big\| = \max_{1\le i\le n} \sup_{x\in K} \Big| \frac{\partial^m v(x)}{\partial {x_i}^m} \Big|,$$

其中${e_i}^m = (e_i, e_i, \cdots, e_i)$。

令$\hat{K}$为中心在原点，边平行于坐标轴，边长为2的正方体的参考单元，$\hat{a}_i\,(1 \le i \le 8)$为$\hat{K}$的八个顶点，其中

$$\hat{a}_1 = (-1,-1,-1), \quad \hat{a}_2 = (1,-1,-1), \quad \hat{a}_3 = (-1,1,-1), \quad \hat{a}_4 = (1,1,-1),$$

$$\hat{a}_5 = (-1,-1,1), \quad \hat{a}_6 = (1,-1,1), \quad \hat{a}_7 = (-1,1,1), \quad \hat{a}_8 = (1,1,1),$$

对任一单元$K \in \mathcal{T}_h^0$，定义等参变换$F_K \in (Q_1(\hat{K}))^3$为

$$x = F_K(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{8} a_{i,K}\hat{p}_i(\xi,\eta,\zeta), \quad \forall\, \hat{x} \in \hat{K},$$

其中

$$\hat{p}_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)}{8},$$

(ξ_i,η_i,ζ_i)为正六面体的第i个顶点的自然坐标，构成$Q_1(\hat{K})$的一组基。容易验证，F_K满足$F_K(\hat{a}_i) = a_{i,K}$，$1 \le i \le 8$。

因此，任意六面体单元K上的有限元三元组(K, P_K, Σ_K)定义为

$$P_K = \mathrm{span}\big\{\, p_i := \hat{p}_i \circ F_K^{-1},\ 1 \le i \le 8 \,\big\}, \quad \Sigma_K = \big\{\, a_{i,K},\ 1 \le i \le 8 \,\big\},$$

所有这样的单元集合(K, P_K, Σ_K)称为$\langle 1\rangle$型矩形$(\hat{K}, Q_1(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$的等参族。

区域Ω的六面体单元剖分$\mathcal{T}_h$为

$$\mathcal{T}_h := \big\{\, K : K = F_K(\hat{K}),\ \forall\, \hat{K} \in \mathcal{T}_h^0 \,\big\}.$$

3 二阶Dirichlet问题的六面体等参元逼近

设Ω是$\mathbf{R}^n$中有界开子集，具有曲面边界$\partial\Omega$，考虑二阶齐次Dirichlet问题

$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \int_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\partial_i u \partial_j v \mathrm{d}x, \\ f(v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha_{ij}\in L^\infty(\Omega)$，$f\in L^2(\Omega)$，在 $\bar\Omega$ 上处处有定义，且满足椭圆性条件：$\exists\,\beta>0$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\beta\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \xi_i,1\le i\le n,\quad \forall\,x\in\bar\Omega.$$

我们用 ⟨1⟩ 型六面体等参元逼近问题 (1)，其离散空间为

$$X_h=\left\{v_h:v_h\,|_K\in P_K\right\}\subset C^0(\bar\Omega_h),$$

其中 $\bar\Omega_h=\bigcup_{K\in\mathcal{T}_h}K$，一般来说 $\bar\Omega_h\ne\bar\Omega$，由 $X_h\subset C^0(\bar\Omega_h)$，因而 $X_h\subset H^1(\Omega_h)$。

令

$$V_h=\left\{v_h\in X_h:v_h(b)=0,\ b\text{是}\partial\Omega\text{上的节点}\right\}.$$

显然，$V_h\subset H^1(\Omega_h)$。

因为 $\partial\Omega_h$ 和 $\partial\Omega$ 非常接近，所以我们可假定，存在一个有界开集 $\tilde\Omega$ 使：$\Omega\subset\tilde\Omega$, $\Omega_h\subset\tilde\Omega$，对任意的 h。于是式 (1) 的等参有限元逼近为

$$\begin{cases}\text{求 }\tilde u_h\in V_h\text{，使得}\\ \int_{\Omega_h}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\tilde\alpha_{ij}\partial_i\tilde u_h\partial_jv_h\mathrm{d}x=\int_{\Omega_h}\tilde fv_h\mathrm{d}x,\ \forall\,v_h\in V_h,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\tilde\alpha_{ij}$, $\tilde f$ 分别是 α_{ij}, f 到 $\tilde\Omega$ 上的某种扩张。

现在，在等参元逼近问题 (2) 中，以数值积分代替精确积分

$$\begin{cases}\text{求 }u_h\in V_h\text{，使得}\\ a_h(u_h,v_h)=(f,v_h)_h,\ \forall\,v_h\in V_h,\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$a_h(u_h,v_h)=\sum_K\left\{\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,K}\Big(\sum_{i,j}\alpha_{ij}\partial_iu_h\partial_jv_h\Big)(b_{l,K})\right\},$$

$$(f,v_h)_h=\sum_K\left\{\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,K}(fv_h)(b_{l,K})\right\}.$$

考察上述问题的确定性，只要考察数值积分节点 $b_{l,K}$ 是否包含在 $\bar K\bigcap\bar\Omega$ 上。

定义 1　若存在与 h 无关的常数 $\tilde\alpha>0$，使对任意的 $v_h\in V_h$，有

$$\tilde\alpha\|v_h\|_{1,\Omega_h}^2\le a_h(v_h,v_h),$$

则称 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的。

仿文献 [4] 中 §11 定理 1，易证下列引理。

引理 1　若 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的，则存在常数 C 与 h 无关，使得：对任意的 $\tilde u\in H^1(\tilde\Omega)$，

$$\|\tilde u-u_h\|_{1,\Omega_h}\le C\bigg(\inf_{v_h\in V_h}\|\tilde u-v_h\|_{1,\Omega_h}+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}}$$
$$+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde a(\tilde u,w_h)-f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}}\bigg),$$

其中 u_h 是 (3) 的解。

我们用 $\Pi_K v$ 表示函数 v 的 P_K-插值，$\Pi_h v$ 表示函数 v 的 V_h-插值，且

$$\Pi_K v(a_{i,K}) = v(a_{i,K}), \quad \Pi_h v\,|_K = \Pi_K v, \quad \hat{\Pi}\hat{v}(\hat{a}_i) = \hat{v}(\hat{a}_i).$$

定理1 设 $\{V_h\}$ 是一个由正则 $\langle 1\rangle$ 型六面体等参元构成的有限元空间族，$n \leq 3$，则存在 C 与 h 无关，对任意的 $v \in H^2(\tilde{\Omega})$

$$\|v - \Pi_h v\|_{m,\Omega_h} \leq Ch^{2-m}\|v\|_{2,\Omega_h}, \quad m = 0, 1.$$

证明 因 $n \leq 3$, $2 > \frac{3}{2} \geq \frac{n}{2}$, $H^2(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$，由正则 $\langle 1\rangle$ 型六面体等参元插值误差估计式

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C(h_K^3)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h_K^{2-m} |v|_{2,p,K}, \quad m = 0, 1.$$

此处 $p = q = 2$，则有

$$|v - \Pi_K v|_{0,K} \leq Ch_K^2 |v|_{2,K} \leq Ch_K^2 \|v\|_{2,K},$$

$$|v - \Pi_K v|_{1,K} \leq Ch_K |v|_{2,K} \leq Ch_K \|v\|_{2,K},$$

因为 $\Pi_h v|_K = \Pi_K v$ 对一切 $K \in \mathcal{T}_h$ 成立，故我们有

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega_h} = \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v - \Pi_K v\|_{1,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq Ch\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|_{2,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}} = Ch\|v\|_{2,\Omega_h}.$$

定理证毕。

4 数值积分的影响

本节将考察数值积分对六面体等参有限元逼近问题 (1) 的影响，考虑四种数值积分格式，它们在参考单元上分别用八个、六个、五个和四个积分点，对这四种数值积分格式，我们将证明最优 H^1 误差估计。

首先，定义逼近问题。

问题1 求 $u_h \in V_h$，使得 $a(u_h, v) = (f, v)$, $\forall\, v \in V_h$。

在参考单元上定义数值积分格式

$$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}(\hat{x}) \approx \sum_{i=1}^{I} \hat{\omega}_i \hat{\varphi}(\hat{b}_i), \quad \hat{\omega}_i > 0, \quad \hat{b}_i \in \hat{K}, \quad 1 \leq i \leq I.$$

数值积分误差泛函记为

$$E_K(\varphi) = \int_K \varphi(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,K}\varphi(b_{i,K}),$$

$$\hat{E}_{\hat{K}}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} - \sum_{i=1}^{I} \hat{\omega}_i \hat{\varphi}(\hat{b}_i), \quad E_K(\varphi) = \hat{E}_{\hat{K}}(\hat{\varphi} J_K),$$

令 $\hat{Q} = \{1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi\eta\zeta\}$。假定数值积分格式对 $\hat{Q}$ 精确，考虑如下数值积分格式：

格式 1:　$I = 8$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{8} = 1,1,1,1,1,1,1,1,$$

$$\{\hat{b}_i\}_{i=1}^{8} = (-1,-1,-1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(1,1,-1),$$
$$(-1,-1,1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1),$$

格式 2:　$I = 6$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{6} = 1,1,1,1,2,2,$$

$$\{\hat{b}_i\}_{i=1}^{6} = (-1,-1,-1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(1,1,-1),(0,-1,1),(0,1,1),$$

格式 3:　$I = 5$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{5} = 1,1,2,2,2,$$

$$\{\hat{b}_i\}_{i=1}^{5} = (-1,-1,-1),(1,-1,-1),(0,1,-1),(0,-1,1),(0,1,1),$$

格式 4:　$I = 4$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{4} = 2,2,2,2, \quad \{\hat{b}_i\}_{i=1}^{4} = (0,-1,-1),(0,1,-1),(0,-1,1),(0,1,1),$$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{4} = 2,2,2,2, \quad \{\hat{b}_i\}_{i=1}^{4} = (-1,0,-1),(1,0,-1),(-1,0,1),(1,0,1),$$

$$\{\hat{\omega}_i\}_{i=1}^{4} = 2,2,2,2, \quad \{\hat{b}_i\}_{i=1}^{4} = (-1,-1,0),(1,-1,0),(-1,1,0),(1,1,0),$$

注　格式 2 与格式 3 仅考虑了其中一种情形，其它几种情形可对称得到。

现在，把数值积分格式应用到有限元方程

$$a_h(u,v) \equiv \sum_{K\in\mathcal{T}_K} Q_K\Big(\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}\partial_i u\partial_j v\Big) \quad 及 \quad (f,v)_h \equiv \sum_{K\in\mathcal{T}_K} Q_K(fv_h),$$

则问题 1 转化为求解如下问题。

问题 2　求 $u_h \in V_h$，使得 $a_h(u_h,v) = (f,v)_h$，$\forall\, v \in V_h$。

引理 2　修正变分形式 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是 V_h 椭圆的，即存在与 h 无关的常数 C，使得

$$c\|v_h\|_{1,\Omega_h}^2 \le a_h(v_h,v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{4}$$

证明　由文献 [4] 中 §11 定理 3 知，对积分格式 1 至格式 4 来说，(4) 式显然成立。

仿文献 [11] 中引理 5.2 和引理 5.3 的证明，可得如下结论。

引理 3　设已给定一个 $\langle 1\rangle$ 型矩形的正则等参族 (K)，参考元 $\hat{K}$ 上数值积分公式满足

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = 0, \quad \forall\, \hat{\varphi} \in Q_1(\hat{K}),$$

则存在常数 C 与单元 K 无关，使得对任意的 $\alpha_{ij} \in W^{1,\infty}(K)$，$v,w \in P_K$，有

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{3} E_K(\alpha_{ij}\partial_j v\partial_i w)\Big| \le Ch_K\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\|\alpha_{ij}\|_{1,\infty,K}\Big)\|v\|_{2,K}|w|_{1,K}.$$

引理4　设已给定一个 $\langle 1\rangle$ 型矩形的正则等参族 (K)，参考元 $\hat{K}$ 上数值积分公式满足

$$\hat{E}(\hat{\varphi})=0,\quad \forall\,\hat{\varphi}\in Q_1(\hat{K}),$$

则存在常数 C 与单元 K 无关，使得对任意的 $f\in W^{1,q}(K)$, $v\in P_K$, $q\geq 2$，有

$$|E_K(fv)|\leq Ch_K\big(\mathrm{mean}(K)\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{1,q,K}\|v\|_{1,K}.$$

定理2　设 $\{V_h\}$ 是 $\langle 1\rangle$ 型矩形的等参族，若满足

(i)　正则性条件：存在常数 σ 和 γ，使对任意的 K，K 是凸的六面体

$$\frac{h_K}{h'_K}\leq\sigma,\quad \gamma_K\leq\gamma<1;$$

(ii)　$\hat{K}$ 上数值积分公式满足，对任意的 $\hat{\varphi}\in Q_1(\hat{K})$, $\hat{E}(\hat{\varphi})=0$;

(iii)　设 $\tilde{\Omega}$ 是一个开集，满足：$\Omega\subset\tilde{\Omega}$, $\Omega_h\subset\tilde{\Omega}$，对任意的 h。Ω_h 是 (1) 型六面体构成的 Ω 近似区域，且 u 和 α_{ij} 存在一个扩张 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{\alpha}_{ij}$，定义在 $\tilde{\Omega}$ 上满足

$$\tilde{u}\in H^2(\tilde{\Omega}),\quad \tilde{\alpha}_{ij}\in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}),\quad 1\leq i,j\leq 3$$

且

$$\tilde{f}=-\sum_{i,j=1}^{3}\partial_j(\tilde{\alpha}_{ij}\partial_i\tilde{u})\in W^{1,q}(\tilde{\Omega}),\quad q\geq 2,$$

则存在常数 C，使得

$$\|\tilde{u}-u_h\|_{1,\Omega_h}\leq Ch\Big(\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}}+\sum_{i,j=1}^{3}\|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{1,\infty,\tilde{\Omega}}\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}}+\|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{\Omega}}\Big).$$

证明　我们应用引理1，就有

$$\|\tilde{u}-u_h\|_{1,\Omega_h}\leq C\Big(\|\tilde{u}-\Pi_h\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde{a}(\Pi_h\tilde{u},w_h)-a_h(\Pi_h\tilde{u},w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}}+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde{a}(\tilde{u},w_h)-f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}}\Big),$$

其中 $\Pi_h\tilde{u}$ 是函数 $\tilde{u}$ 的 V_h-插值，因为 $\frac{3}{2}<2$，所以 $H^2(\tilde{\Omega})\hookrightarrow C^0(\bar{\tilde{\Omega}})$，故它是有定义的。

由定理1，我们有

$$\|\tilde{u}-\Pi_h\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}\leq ch\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}}.$$

其次，利用引理2，引理3及Schwarz不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\tilde{a}(\Pi_h\tilde{u},w_h)-a_h(\Pi_h\tilde{u},w_h)\\ =&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{i,j=1}^{3}E_K(\tilde{\alpha}_{ij}\partial_i\Pi_h\tilde{u}\partial_j w_h),\ (\text{因为 }\alpha_{ij}(b_{i,K})=\tilde{\alpha}_{ij}(b_{i,K}))\\ \leq&\ Ch\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{1,\infty,\tilde{\Omega}}\Big)\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\Pi_K\tilde{u}\|_{2,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|w_h\|_{1,\Omega_h}\\ \leq&\ Ch\sum_{i,j=1}^{3}\|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{1,\infty,\tilde{\Omega}}\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}}\|w_h\|_{1,\Omega_h},\end{aligned}$$

于是，有

$$\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde{a}(\Pi_h\tilde{u},w_h)-a_h(\Pi_h\tilde{u},w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}}\le Ch\sum_{i,j=1}^{3}\|\tilde{\alpha}_{ij}\|_{1,\infty,\tilde{\Omega}}\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}}.$$

由于数值积分节点 $b_{i,K}\in\tilde{\Omega}$，所以 $f(b_{i,K})=\tilde{f}(b_{i,K})$。这样，我们利用引理4得

$$\begin{aligned}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|\tilde{a}(\tilde{u},w_h)-f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sup_{w_h\in V_h}E_K(\tilde{f}w_h)\\ &\le Ch\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\text{mean}(\tilde{K})\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\tilde{f}\|_{1,q,\Omega_h}=Ch\|\tilde{f}\|_{1,q,\Omega_h}.\end{aligned}$$

定理证毕。

参考文献：

[1] Bramble J H, Thoms King J. A robust finite element method for nonhomogeneous Dirichlet problems in domains with curved boundaries[J]. Mathematics of Computation, 1994, 63(207): 698-702

[2] 郑伟英，陈绍春. 曲边区域非齐次 Dirichlet 问题的类 Wilson 元逼近[J]. 计算数学，2003, 25(1): 67-78
Zheng W Y, Chen S C. Solving nonhomogenous Dirichlet boundary problems in domains with curved boundaries by like Wilson element method[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2003, 25(1): 67-78

[3] Scott R. Interpolated boundary conditions in the finite element method II[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1975, 12(3): 404-427

[4] 石东洋，周家全，陈绍春. 曲边区域上定常 Stokes 方程的类 Wilson 元逼近[J]. 工程数学学报，2008, 25(1): 54-61
Shi D Y, Zhou J Q, Chen S C. The quasi-Wilson element method for the stationary Stokes equations in domain with curved boundaries[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(1): 54-61

[5] Cialet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problem[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978

[6] Cialet P G, Raviart P A. Interpolation theory over curved elements with appliations to finite element methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972, 1(2): 217-249

[7] Lamal M Z. Curved elements in the finite element method I[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1973, 10(1): 229-240

[8] Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods[M]. New York: Spring-Verlag, 1998

[9] 李开泰，黄艾香，黄庆怀. 有限元方法及其应用[M]. 西安：西安交通大学出版社，1992
Li K T, Huang A X, Huang Q H. The Finite Element Methods and Application[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1992

[10] Ming P, Shi Z. Mathmatical analysis for quadrilateral rotated Q_1 elements III: the effect of numerical integration[J]. Journal of Computational Mathematics, 2003, 21(1): 287-294

[11] 张斐然，陈绍春. 二阶 Dirichlet 问题的三维等参元逼近及其数值积分格式[J]. 计算数学，2008, 30(2): 183-194
Zhang F R, Chen S C. The approximation by 3-dimensional isoparametric element and a kind of numerical integration format of second order Dirichlet problem[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2008, 30(2): 183-194

The Approximation by Hexahedral Isoparametric Element and the Effect of Numerical Integration of Second Order Dirichlet Problem

ZHANG Fei-ran

(Department of Mathematics, Shangqiu Teachers Colloege, Shangqiu Henan 476000)

Abstract: In the context of numerical simulations, three-dimensional domains with curved boundaries are difficult to deal with, since many numerical schemes can not capture the boundary information efficiently. In this paper, we study the hexahedral isoparametric element method for elliptic problems on domains with curved boundaries. The optimal convergence of the discrete problem to the continuous problem is obtained upon using the isoparametric transformation and scaling techniques. To simplify the computation of elementary matrices and load vectors, we develop four numerical integration formulas on hexahedrons. The optimal convergence of the isoparametric element method using our four integration formulas are also obtained.

Keywords: hexahedral isoparametric finite element; isoparametric transformation; numerical integration

Received: 04 Aug 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10471133; 10590353); the Natural Science Foundation of Henan Province (092300410141).